Indicar **claramente** apellido y número de padrón en cada hoja que entregue. Todas las respuestas deben estar **debidamente justificadas**. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS BIEN RESUELTOS

Apellido: ……………………………………Nombres:………………………………………………

Padrón:………………………

1. Hallar, mediante una integral de línea, el flujo del rotor del campo $\vec{f}(x,y,z) = (z^2, -x^2, -2y^2)$ a través de la porción de superficie $x = \sqrt{z^2 + y^2}$ $con\ 1 \le z^2 + y^2 \le 4$
   Indicar en un gráfico el sentido de circulación y la orientación de la superficie elegida.

2. La superficie de ecuación $z = 1+xy^2 - 4x + x^2$ tiene tres puntos en los que su plano tangente es horizontal.

   a) Hallar, mediante una integral de superficie, el área del triángulo que tiene dichos puntos como vértices.

   b) Calcular el perímetro del triángulo.

3. Sea la ecuación diferencial $xy\,(x+1)\,dx + (y^3 + 1)(x^3 + 2x^2)\,dy = 0$

   a) Mostrar que no es una ecuación diferencial exacta.

   b) Hallar la solución general.

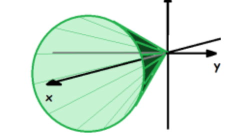
4. Sea la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \Re^3 : y = x^2 + z^2 \ ;\ 0 \le y \le 4\}$
   Hallar el flujo del campo $\vec{f}(x,y,z) = (-3xe^y - x\cos(y), z + sen(y), 3ze^y)$ a través de Σ.
   Indicar en un gráfico el sentido de la normal utilizada.

5. Sea la región $D = \{(x,y) \in \Re^2 : 1 \le x \le 2 \ ;\ \sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{3}\,x\}$. Hallar la masa de una placa cuya forma coincide con la de la región D siendo la densidad en cada punto $\delta(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

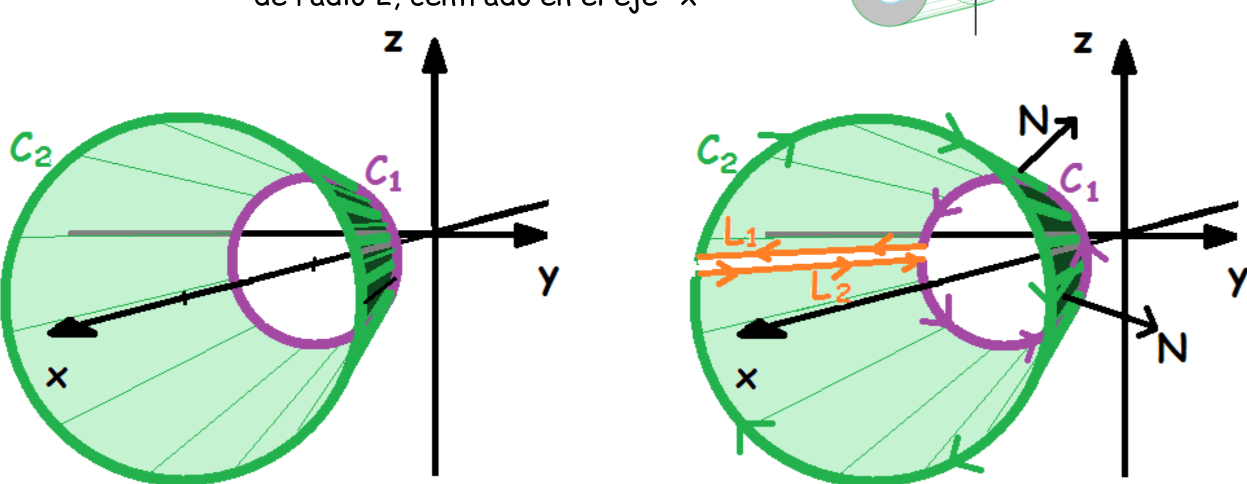
1. ***Hallar, mediante una integral de línea, el flujo del rotor del campo*** $\vec{f}(x,y,z)=\left(z^2,-x^2,-2y^2\right)$ ***a través de la porción de superficie*** $x=\sqrt{z^2+y^2}$ ***con*** $1\le z^2+y^2\le 4$

Indicar en un gráfico el sentido de circulación y la orientación de la superficie elegida.

Analizo la forma de la superficie:



$$\begin{cases} x=\sqrt{z^2+y^2}\ (S) & \leftarrow \text{semicono positivo centrado en el eje 'x'} \rightarrow \\ 1\le z^2+y^2\ \ (A) & \leftarrow \text{puntos que están afuera del cilindro de radio 1, centrado en el eje 'x'} \\ z^2+y^2\le 4\ \ (B) & \leftarrow \text{puntos que están adentro del cilindro de radio 2, centrado en el eje 'x'} \end{cases}$$



Según el Teorema de Stokes el flujo del rotor de un campo es igual a la circulación a lo largo del borde de S, cuya orientación debe ser compatible con la orientación de S. En el gráfico se ve que C_1 y C_2 son los bordes del cono truncado, pero no forman parte de UNA curva (son DOS). Para "transformarlas" en UNA, creé las curvas L_1 y L_2, iguales pero de sentido contrario, así sus flujos son iguales pero de sentido contrario, y se anula entre sí:

$$\oint_{L_1}\vec{f}.d\bar{l}=-\oint_{L_2}\vec{f}.d\bar{l}\Rightarrow\oint_{L_1}\vec{f}.d\bar{l}+\oint_{L_2}\vec{f}.d\bar{l}=0$$

Sea $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C_1} \cup \boldsymbol{L_1} \cup \boldsymbol{C_2} \cup \boldsymbol{L_2}$

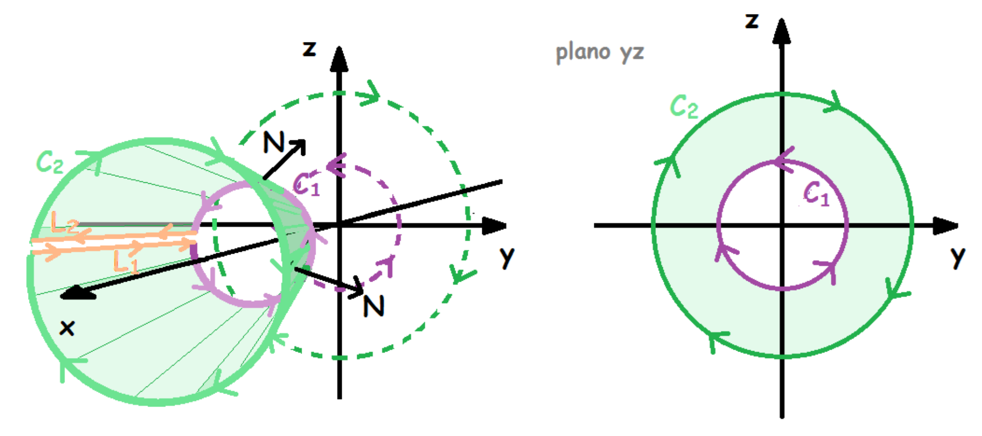
Verifico que se cumplan las hipótesis del Teorema de Stokes:

- ✓ Sea S la superficie perteneciente al cono truncado encerrada por C, veo que es una superficie suave y orientable.
- ✓ C (borde de S) es una curva suave y orientada positivamente.
- ✓ $\vec{F}:\Re^3\rightarrow\Re^3 con\ \vec{F}_{(x,y,z)}=\left(P_{(x,y,z)},Q_{(x,y,z)},R_{(x,y,z)}\right),\ donde\ P_{(x,y,z)},Q_{(x,y,z)}\ y\, R_{(x,y,z)}\in C^{\infty}(\Re^3)$ pues son polinomios $\therefore \vec{F}\in C^{\infty}(\Re^3)\ \rightarrow\ \vec{F}\in C^{1}(\Re^3)$

Como se cumplen las hipótesis, puedo calcular la circulación utilizando el Teorema de Stokes:

$$\iint_S rot.\vec{f}.d\bar{s}=\oint_{C^+}\vec{f}.d\bar{l}=\int_{C_1}\vec{f}.d\bar{l}+\underbrace{\int_{L_1}\vec{f}.d\bar{l}+\int_{L_2}\vec{f}.d\bar{l}}_{0}+\int_{C_2}\vec{f}.d\bar{l}=\int_{C_1}\vec{f}.d\bar{l}+\int_{C_2}\vec{f}.d\bar{l}$$

Para calcular las circulaciones sobre C_1 y C_2 parametrizo las curvas. Para eso, proyecto el semicono en el plano yz (por la forma que tiene la superficie)



$$C_1 : \overline{\gamma}_{1(t)} = (1, \cos(t), sen(t)) \;\; t \in [0, 2\pi] \rightarrow \overline{\gamma}'_{1(t)} = (0, -sen(t), \cos(t))$$
$$C_2 : \overline{\gamma}_{(t)} = (2, 2.sen(t), 2.\cos(t)) \;\; t \in [0, 2\pi] \rightarrow \overline{\gamma}'_{2(t)} = (0, 2.\cos(t), -2.sen(t))$$

Me parece importante recordar que la parametrización (cos(t),sen(t)) y (sen(t),cos(t)), con t ε [0,2Π] definen la misma circunferencia, pero en sentido contrario.

$$\iint_S rot.\vec{f}.d\bar{s} = \oint_{c^+} \vec{f}.d\bar{l} = \int_{C_1} \vec{f}.d\bar{l} + \int_{C_2} \vec{f}.d\bar{l} = \int_{C_1} \vec{f}(\overline{\gamma}_{1(t)}).(\overline{\gamma}'_{1(t)}).d\bar{l} + \int_{C_2} \vec{f}(\overline{\gamma}_{2(t)}).(\overline{\gamma}'_{2(t)}).d\bar{l} =$$
$$= \int_0^{2\pi} (sen^2(t), -1, -2.\cos^2(t)).(0, -sen(t), \cos(t))dt +$$
$$+ \int_0^{2\pi} (4.\cos^2(t), -4, -4.sen^2(t)).(0, 2.\cos(t), -2.sen(t))dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} (sen(t) - 2.\cos^3(t))dt + \int_0^{2\pi} (-8.\cos(t) + 8.sen^3(t))dt = 0 = \oint_{c^+} \vec{f}.d\bar{l} = \iint_S rot.\vec{f}.d\bar{s}$$

$$\boxed{\iint_S rot.\vec{f}.d\bar{s} = 0}$$

2. *La superficie de ecuación z = 1+xy² - 4x + x² tiene tres puntos en los que su plano tangente es horizontal.*

a) *Hallar, mediante una integral de superficie, el área del triángulo que tiene dichos puntos como vértices.*

Sea f(x,y)=z → $f(x,y) = 1+xy^2 - 4x + x^2$, busco en qué puntos del dominio (R^2) el gradiente se anula, pues si PC = (x_0, y_0), entonces en (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) el plano tangente será horizontal.

$$f(x,y) = 1 + xy^2 - 4x + x^2$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \, , \, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = (0,0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 - 4 + 2x = 0 \;\to\; \overbrace{2x + y^2 = 4}^{(1)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy = 0 \;\to x = 0 \,\vee\, y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \overset{por\ (1)}{\to} y = |2| \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \to y = 2 \\ x = 0 \to y = -2 \end{array} \right. \\ y = 0 \overset{por\ (1)}{\to} x = 2 \end{array}$$

x = 0 → PC_1= (0,2) ; PC_2 = (0,-2)

y = 0 → PC_3= (2,0)

Por lo tanto, los tres puntos donde el planto tangente es horizontal son:

A = (0,2,f (0,2)) = **(0,2,1) = A**

B = (0,-2,f(0,-2)) = **(0,-2,1) = B**

C = (2, 0, f(2,0)) = **(2,0,-3) = C**

Para hallar la normal a S hallo el producto vectorial $\overline{BC} \, x \, \overline{BA}$

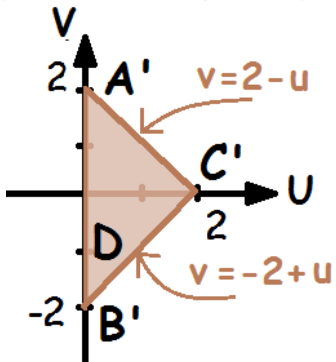
$$\left. \begin{array}{l} \overline{BC} = C - B = (2,2,-4) \\ \overline{BA} = A - B = (0,4,0) \end{array} \right\} N_S = (16,0,8) \equiv N_S = (2,0,1)$$

Un punto de paso *P* puede ser cualquiera de los tres, elijo *A*=(0,2,1)

S : 2 x + z = d ; d = N_S . P = (2,0,1) . (0,2,1) = 1 → **S : 2x + z = 1**

Para parametrizar la superficie tengo que z= 1 – 2x

Proyecto sobre el plano xy (z = 0) → los vértices, proyectados, son los PC hallados.



δ(u,v) = (u , v , 1 - 2u)

0 ≤ u ≤ 2

-2+x ≤ v ≤ 2-u

δ ' u = (1 , 0 , - 2)

δ ' v = (0 , 1 , 0)

$$N = (2,0,1) \;\to\; \|N\| = \sqrt{5}$$

$$Área = \iint_S 1.d\vec{s} = \iint_D \overbrace{\|N\|.du.dv}^{d\vec{s}} = \sqrt{5}\int_0^2\int_{-2+u}^{2-u} dv.du = \sqrt{5}\int_0^2 (2-u-(-2+u))du = \sqrt{5}\int_0^2 (4-2u)du =$$

$$= 2\sqrt{5}\int_0^2 (2-u)du = 2\sqrt{5}\left(2u - \frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 4\sqrt{5} = Área$$

$$\boxed{4\sqrt{5} = Área}$$

b) *Calcular el perímetro del triángulo*

Piden el perímetro… no lo piden que se haga con integrales de líneas así que opto por el método más simple: sumar los módulos de los lados:

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{BA} = (0,4,0) & \to & \|\overline{BA}\| = 4 \\ \overline{BC} = (2,2,-4) & \to & \|\overline{BC}\| = 2\sqrt{6} \\ \overline{AC} = (2,-2,-4) & \to & \|\overline{AC}\| = 2\sqrt{6} \end{array}\right\} \; Perímetro = 4 + 4\sqrt{6}$$

$$\boxed{Perímetro = 4 + 4\sqrt{6}}$$

3. Sea la ecuación diferencial xy (x+1) dx + (y^3 + 1)(x^3 + 2x^2) dy = 0

a) Mostrar que no es una ecuación diferencial exacta.

Sean P(x,y) = xy (x+1) y Q(x,y)= (y^3 + 1)(x^3 + 2x^2)

P(x,y) y Q (x,y) Є $C^\infty(R^2)$ por ser polinomios → P(x,y) y Q (x,y) Є $C^1(R^2)$, entonces, la ecuación diferencial es total y exacta sí y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Veamos si se cumple:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = x(x+1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = (y^3+1)(3x^2+4x)$$

➔ **Si x≠0 P'y y Q'x son distintas,** por lo tanto si x ≠ 0 **No es una ecuación diferencial exacta**

b) Hallar la solución general.

$$xy(x+1)dx + (y^3+1).(x^3+2x^2)dy = 0$$

$$xy(x+1)dx = -(y^3+1).(x^3+2x^2)dy$$

$$\underbrace{\frac{x(x+1)}{(x^3+2x^2)}dx}_{(1)} = \underbrace{\frac{-(y^3+1)}{y}dy}_{(2)}$$

Es una ecuación diferencial de variables separables. Las resuelvo por separado y después las igualo para hallar la solución general:

(1) $$\int \frac{x(x+1)}{(x^3+2x^2)}dx = \int \frac{x(x+1)}{x(x^2+2x)}dx = \int \frac{(x+1)}{(x^2+2x)}dx \overset{\text{Cambio de variable}}{=}$$

$$= \int \frac{(x+1)}{u}.\frac{du}{2(x+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}.du = \frac{1}{2}.\ln(u) + C_1 = \frac{1}{2}.\ln(x^2+2x) + C_1$$

$$u = (x^2+2x)$$
$$du = (2x+2)dx$$
$$dx = \frac{du}{2(x+1)}$$

$$(1) = \frac{1}{2}.\ln(\underbrace{x^2+2x}_{>0}) + C_1 \ ; \ C_1 \in \Re$$

(2) $$-\int \frac{y^3+1}{y}dy = -\int \frac{y(y^2+\frac{1}{y})}{y}dy = -\int (y^2+\tfrac{1}{y})dy = -\left[\frac{y^3}{3} + \ln(y) + C_2\right]$$

$$(2) = -\frac{y^3}{3} - \ln(y) - C_2 \ ; \ C_2 \in \Re$$

<u>(1)</u> <u>= (2)</u>:

$$\frac{1}{2}.\ln(\underbrace{x^2+2x}_{>0}) + C_1 = -\frac{y^3}{3} - \ln(y) - C_2$$

$$\ln(x^2+2x) = -\frac{2y^3}{3} \overbrace{-2\ln(y)}^{+\ln(y^{-2})} \overbrace{-2C_2 - C_1}^{+C_3}$$

$$\ln(x^2+2x) = -\frac{2y^3}{3} + \ln\left(\frac{1}{y^2}\right) + C_3$$

$$e^{\ln(x^2+2x)} = e^{-\frac{2y^3}{3}+\ln\left(\frac{1}{y^2}\right)+C_3} = e^{-\frac{2y^3}{3}}\,e^{\ln\left(\frac{1}{y^2}\right)}\,\overbrace{e^{C_3}}^{K}$$

$$x^2+2x = e^{-\frac{2y^3}{3}}.\frac{1}{y^2}.K \quad \to \quad y^2(x^2+2x) = e^{-\frac{2y^3}{3}}.K$$

$$\boxed{y^2(x^2+2x) = e^{-\frac{2y^3}{3}}.K \ ; \ (K \in \Re)}$$

4. Sea la superficie $\Sigma = \{(x,y,z)\in\Re^3 : y = x^2+z^2 \ ; \ 0\le y\le 4\}$

Hallar el flujo del campo $\vec{f}(x,y,z) = \left(-3xe^y - x\cos(y), z+sen(y), 3ze^y\right)$ **a través de Σ. Indicar en un gráfico el sentido de la normal utilizada.**

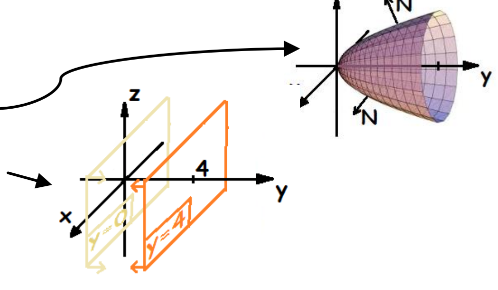
<u>Analizo la forma de Σ</u>:

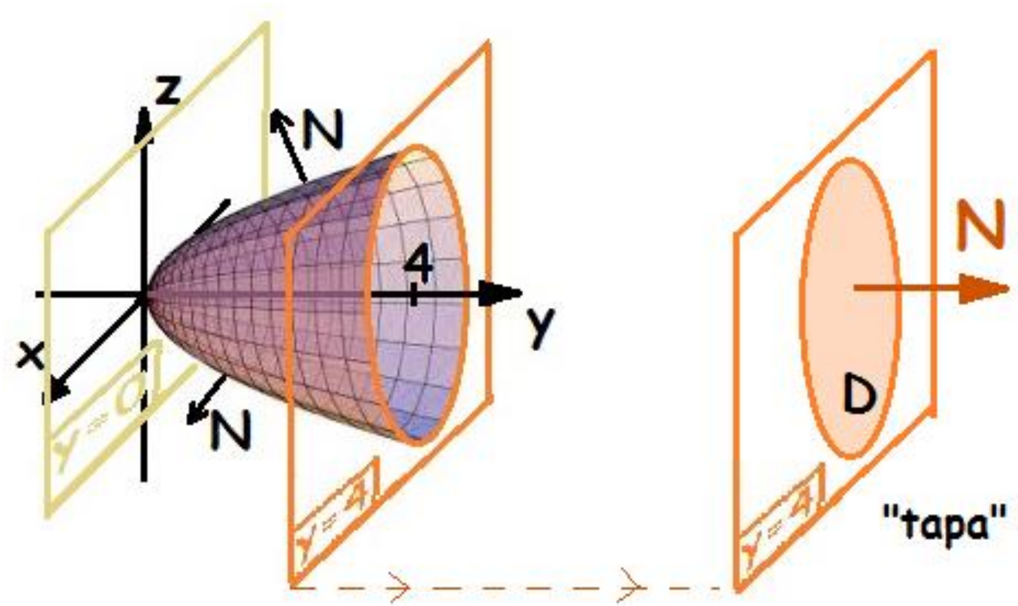
$\begin{cases} y = x^2+z^2 \\ 0\le y \\ y\le 4 \end{cases}$

➔ paraboloide centrado en el eje Y

➔ puntos a la derecha del plano y=0

➔ puntos a la izquierda del plano y=4





Para calcular el flujo analizo si se cumplen las hipótesis del Teorema de Gauss (o de la divergencia). Para eso "cierro" la superficie Σ con una tapa (un disco de radio máximo 2 centrado en (0,4,0)) que la voy a llamar D para formar la frontera del cuerpo W.

I) Sea $\vec{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$; $\vec{f}:\Re^3 \to \Re^3 \in C^\infty(\Re^3)$, pues P(x,y,z), Q(x,y,z) y R(x,y,z) son sumas algebraicas de funciones elementales (polinomios, exponenciales y trigonométricas) → $\vec{f}$ ε C^1 (R^3) √

II) Sea *S* = Σ U D la superficie frontera de W, una superficie orientada hacia el exterior.

III) *W* es una región en R^3 contenida por la superficie S. √

Se verificaron las hipótesis, por lo tanto: $\iint_S \vec{f}.d\vec{s} = \iiint_W div.\vec{f}\, dVol$

Y como: $\iint_S \vec{f}.d\vec{s} = \iint_\Sigma \vec{f}.d\vec{s} + \iint_D \vec{f}.d\vec{s}$,

entonces: $\iint_\Sigma \vec{f}.d\vec{s} = \iint_S \vec{f}.d\vec{s} - \iint_D \vec{f}.d\vec{s}$,

Calculo la divergencia:

$$div.\vec{f} = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$$

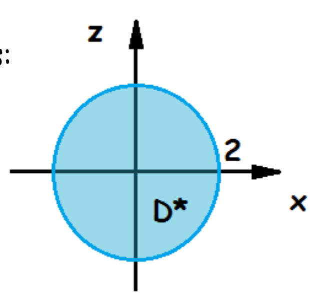
$$\begin{cases} P(x,y,z) = -3xe^{y} - x.\cos(y) & \rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) = -3e^{y} - \cos(y) \\ Q(x,y,z) = z + sen(y) & \rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \cos(y) \\ R(x,y,z) = 3z.e^{y} & \rightarrow \dfrac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) = 3e^{y} \end{cases}$$

$$div.\vec{f} = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) = -3e^{y} - \cos(y) + \cos(y) + 3e^{y} = 0 = div.\vec{f}$$

$$\boxed{\iint_S \vec{f}.d\vec{s} = \iiint_W div.\vec{f}\, dVol = 0}$$

<u>Calculo el flujo sobre el disco D</u>:

Como es un disco sobre el plano y=4, conviene pasarlo a coordenadas cilíndricas:



$$\overline{\sigma}_{(r,t)} = (r.\cos(t), 4, r.sen(t)) \;;\; 0 \le r \le 2 \;;\; 0 \le t \le 2\pi$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\sigma'}_r = (\cos(t), 0, sen(t)) \\ \overline{\sigma'}_t = (-r.sen(t), 0, r.\cos(t)) \end{array}\right\rangle N = (0, r, 0)$$

➔ Como r ≥ 0 entonces

N es SALIENTE de W

$$\iint_D \vec{f}.d\vec{s} = \iint_{D^*} \vec{f}(\sigma(r,t)).(\sigma' t \ x \ \sigma' r) dr.dt =$$

$$= \iint_{D^*} \left(\overbrace{-3.r.\cos(t)e^{4}}^{3xe^{y}} - \overbrace{r.\cos(t).\cos(4)}^{x.\cos(y)} \,,\, \overbrace{r.sen(t) + sen(4)}^{z+sen(y)} \,,\, \overbrace{3.r.sen(t).e^{4}}^{3ze^{y}} \right) . \overbrace{(0, r, 0)}^{N} dr.dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (r^2.sen(t) + r.sen(4)) dr.dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3} sen(t) + \frac{r^2}{2} sen(4) \right) \Big|_0^2 dt =$$

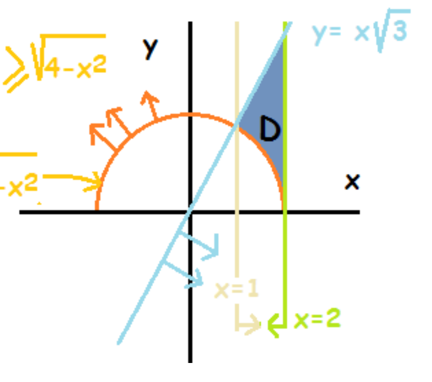
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3} sen(t) + 2sen(4) \right) dt = 4\pi.sen(4) = \iint_D \vec{f}.d\vec{s}$$

Por lo tanto:

$$\iint_\Sigma \vec{f}.d\vec{s} = \iint_S \vec{f}.d\vec{s} - \iint_D \vec{f}.d\vec{s} = 0 - 4\pi.sen(4)$$

$$\boxed{\iint_\Sigma \vec{f}.d\vec{s} = -4\pi.sen(4)}$$

5. Sea la región $D=\{(x,y)\in\Re^2 : 1\le x\le 2\ ;\ \sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{3}\,x\}$ **Hallar la masa de una placa cuya forma coincide con la de la región D siendo la densidad en cada punto** $\delta(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$



Analizo la forma de D:

$$\begin{cases} 1\le x\le 2 \\ \sqrt{4-x^2}\le y \overset{y\ge 0}{\overbrace{\rightarrow}} 4\le y^2+x^2 \\ y\le\sqrt{3}\,x \end{cases}$$

➔ los puntos que se encuentran entre las rectas x=1 y x=2

➔ Los puntos que se encuentran "afuera" de la semicirc. radio 2 centrada en el origen

➔ Los puntos que están debajo de la recta $y=\sqrt{3}\,x$

La forma de la placa coincide con la región D. Para calcular la masa calculo la integral: $\iint_D \delta(x,y)dx.dy$

Para hacer la integración hago un cambio de variables a coordenadas polares:

x = r. cos(t)

y = r. sen(t)

Intervalo de t:

La región D está descripta entre la recta $y=0\ e\ y=\sqrt{3}\,x$. Hallo sus ángulos para ver entre qué valores se mueve t :

$$\left.\begin{matrix} y=0 \\ y=r.sen(t)\end{matrix}\right\} \overset{r>0}{\overbrace{\rightarrow}} sen(t)=0\rightarrow t=0$$

$$\left.\begin{matrix} y=\sqrt{3}\,x \\ y=r.sen(t) \\ x=r.\cos(t)\end{matrix}\right\}\rightarrow \sqrt{3}.r.\cos(t)=r.sen(t)\overset{r>0}{\overbrace{\rightarrow}}\frac{sen(t)}{\cos(t)}=\sqrt{3}=tg(t)\ \rightarrow\ arctg\left(\sqrt{3}\right)=t_1=\frac{\pi}{3}\vee t_2=\frac{4\pi}{3}$$

(el valor de t_2 sirve para los valores de y menores que cero, por lo tanto, se descarta) $0\le t\le\frac{\pi}{3}$

Intervalo de r:

El valor de *r* se mueve desde afuera de la semicircunferencia de radio 2 centrada en el origen hasta la recta x=2

$$\left.\begin{matrix} x=2 \\ x=r.\cos(t)\end{matrix}\right\}\rightarrow r.\cos(t)=2 \overset{\cos(t)\,NO\,se\,anula\ en\,el\,intervalo\,de\,t}{\overbrace{\rightarrow}} r=\frac{2}{\cos(t)}$$

$2\le r\le\frac{2}{\cos(t)}$

El jacobiano de este cambio de coordenadas es I r I. Como r es mayor que cero, usamos r.

Planteo la integral:

$$Masa=\iint_D\frac{x}{x^2+y^2}dx.dy \overset{Cambio\ de\ variable}{\overbrace{=}} \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_2^{\frac{2}{\cos(t)}}\frac{\overset{jacob.}{\overbrace{r}}\ \overset{x}{\overbrace{.r.\cos(t)}}}{\underset{x^2+y^2}{\underbrace{r^2}}}dr.dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_2^{\frac{2}{\cos(t)}}\cos(t)dr.dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(t).r\Big|_2^{\frac{2}{\cos(t)}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(t).\left(\frac{2}{\cos(t)}-2\right)dt=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos(t))dt=2(t-sen(t))\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$$

$$\boxed{Masa=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}}$$

¡¡¡ Éxitos en los exámenes !!!

"Si todo te da igual, estás haciendo mal las cuentas" (Albert Einstein)

(si encuentran algún error, algo no está muy claro o está mal explicado, por favor escríbanme un mail a sylvina64@gmail.com así lo corrijo)